# Топологија простора $\mathbb{R}^n$. Непрекидност и гранична вриједност функције

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{1,n}\},\ n \geq 1$$

– $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ – векторски простор

– $(\mathbb{R}^n, d)$, $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

– Метрички простор

– $A \subseteq \mathbb{R}^n$ је отворен скуп ако за свако $x\in A$ постоји $r>0$ тако да $B(x,r)\subset A$.

– $F \subseteq \mathbb{R}^n$ је затворен ако је $F^c$ – отворен.

– $f: A\subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$; $a\in A$. Функција $f$ је непрекидна у $a\in A$ ако $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta(\varepsilon,x)>0)(\forall x\in A)(\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon)$ или за сваку околину $V$ тачке $f(a)$ постоји околина $U$ тачке $a$ тако да $f(U)\subset V$.

– $f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $f$ је равномјерно непрекидна на $D$ ако $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall x,y\in D)(\|x-y\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon)$.

– Ако је $f: D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрекидна функција и $D$ – компактан скуп, онда је $f$ равномјерно непрекидна на $D$.

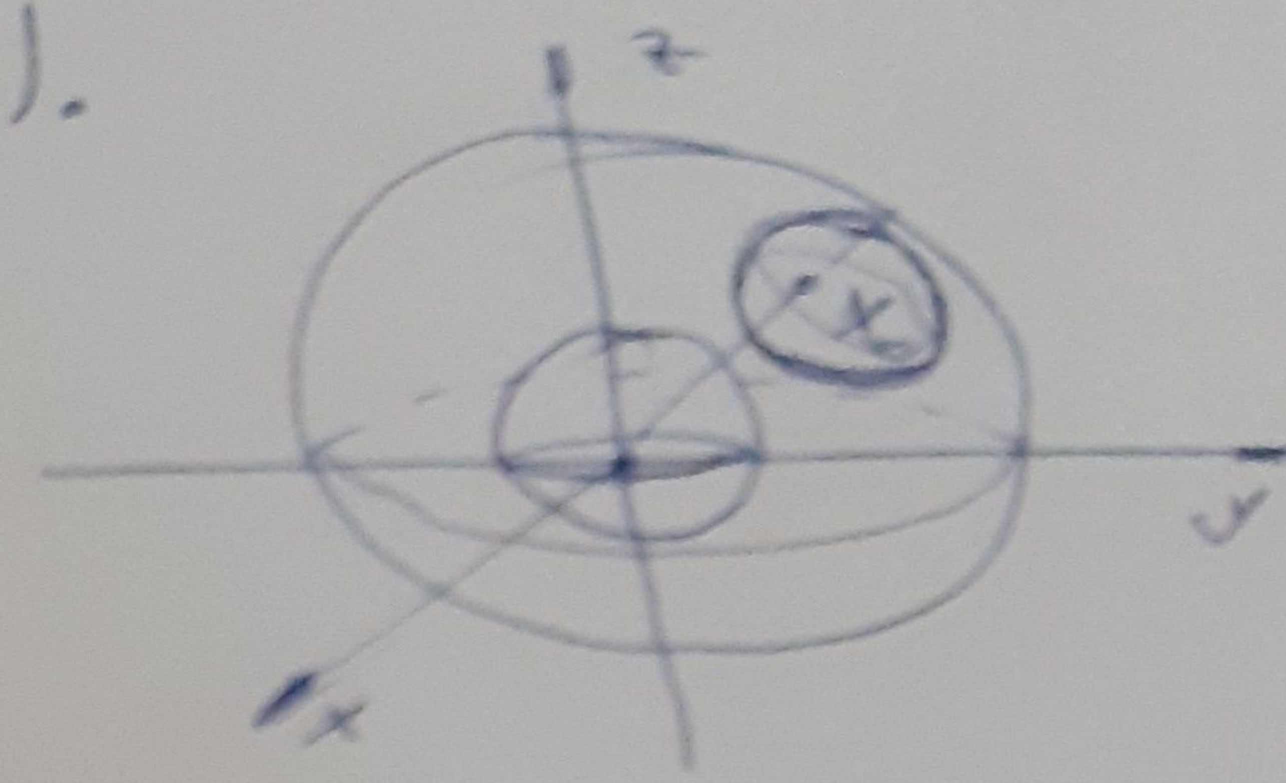
1. Доказати по дефиницији да је скуп $A=\{(x,y,z) \mid 1<x^2+y^2+z^2<4\}$ отворен.

Рјешење: На почетку примијетимо да

$$A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2>1\} \cap \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<4\}$$
$$= B^c(0,1)\cap B(0,2),$$ тј. да је $A$ пресјек

два отворена скупа (предавања).

Итак, (по дефиницији) нека је $x_0 \in A$ и $d=\min\{2-\|x_0\|, \|x_0\|-1\}$.




Докажимо да $B(x_0,d)\subset A$.

За произвољно $z \in B(x_0,d)$ важи

$$\|z\| = \|(z-x_0)+x_0\| \le \|z-x_0\|+\|x_0\| < d+\|x_0\| \le 2$$

И обратно користећи $\|x-y\| \ge |\|x\|-\|y\||$, $x,y\in R^3$

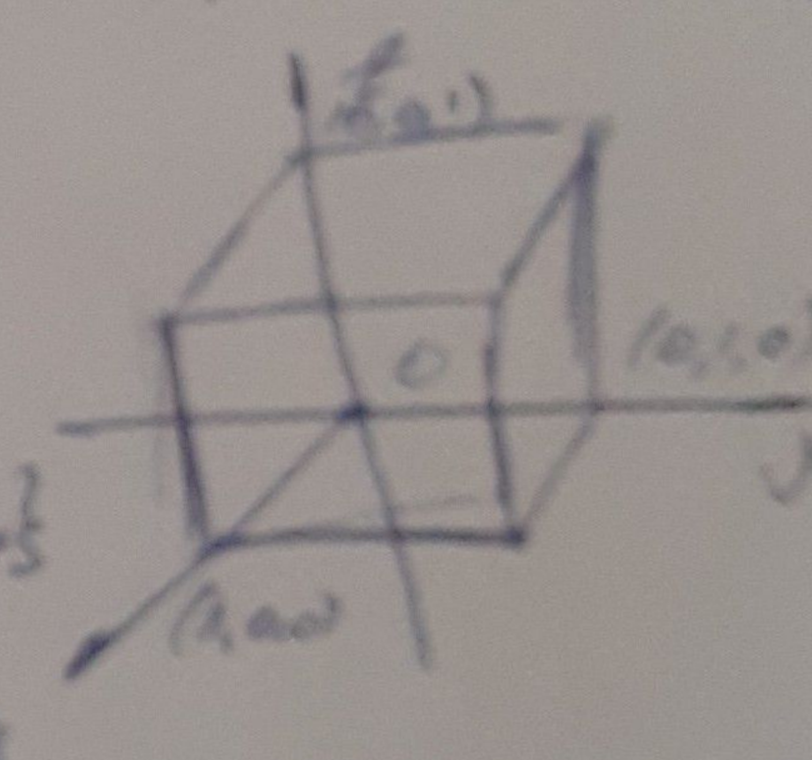
$$\|z\| = \|x_0-(x_0-z)\| \ge |\|x_0\|-\|x_0-z\|| \ge \|x_0\|-\|x_0-z\| > \|x_0\|-d \ge \|x_0\|-(\|x_0\|-1)=1.$$

Дакле, $1<\|z\|<2$, тј.

$B(x_0,d)\subset A$. ■

2. Описати скуп $Q^3\cap[0,1]^3$ у терминима отворен и затворен.

Решење: $Q^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in Q\}$, $[0,1]^3=\{(x,y,z) \mid 0\le x,y,z\le 1\}$




За произвољну тачку $(x_0,y_0,z_0)\in Q^3\cap[0,1]^3$

(претпоставимо $0<x_0,y_0,z_0<1$)

Тада постоји $i_1\in(x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\le\frac{1}{2}\min\{x_0,1-x_0\}$ који је ирационалан број и слично постоје ирационални бројеви $i_2$ и $i_3$ у произвољним околинама за $y_0$ и $z_0$. На тај начин закључујемо да у произвољној околини тачке $(x_0,y_0,z_0)$ постоји тачка са ирационалним координатама, тј. $Q^3\cap[0,1]^3$ није отворен.

Ако би $Q^3\cap[0,1]^3$ био затворен, онда $\overline{Q^3\cap[0,1]^3}=[0,1]^3$, што није очигледно тачно. Генерално, $Q^n$ није ни отворен ни затворен скуп.

3. Описати скуп $A=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{1}{n}, 1\right) \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ у термини-ма отворен, затворен скуп.

<u>Рјешење.</u> Како $\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{1}{n}, 1\right) \longrightarrow (0,0,1)$, $n\to\infty$.

Како $(0,0,1)\notin A$, то $A\neq\bar{A}$, па $A$ није затворен скуп.

Јасно $A$ није отворен.

4. Нека је $\{x_k\}_{k\geq 1}$ низ у $\mathbb{R}^n$ $(x_k=(x_1^k,\dots,x_n^k),\ k\in\mathbb{N})$.

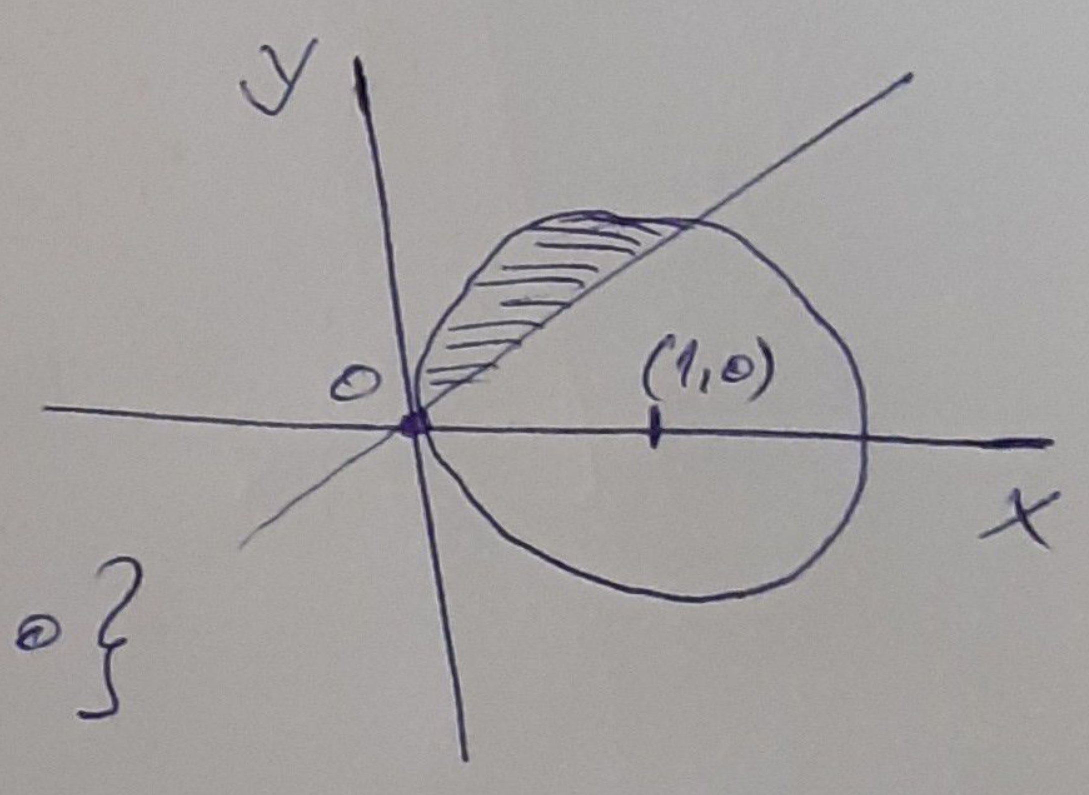
Тада $x_k\longrightarrow x_0$, $k\to\infty$ $(x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0))$ ако и само ако

$x_i^k\to x_i^0$, $k\to\infty$, $i=1,\dots,n$. Доказати.

<u>Рјешење.</u>: Сами.

5. Доказати да је скуп $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<2x,\ y>x\}$ отворен.

<u>Рјешење</u>: $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<2x\}\cap\{(x,y)\mid y>x\}$




$f_1(x,y)=x^2+y^2-2x$.

$f_2(x,y)=y-x$ , Јасно, $f_1,f_2\in C(\mathbb{R}^2)$

$A=\{(x,y)\mid f_1(x,y)<0\}\cap\{(x,y)\mid f_2(x,y)<0\}$

$= f_1^{-1}((-\infty,0))\cap f_2^{-1}((-\infty,0))$.

$(x-1)^2+y^2<1$

како је $(-\infty,0)$ отворен скуп у $\mathbb{R}$ и $f_1,f_2$ непрекидне, $y>x$

то је $A$ отворен скуп као пресјек два отворена скупа.

<u>Коментар</u>: Примијетимо да је свака раван у $\mathbb{R}^3$ затворен скуп. Нека је $\Pi$ раван чија је једначина дата

$\Pi: Ax+By+Cz+D=0$, тј. $\Pi=\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=0\}$

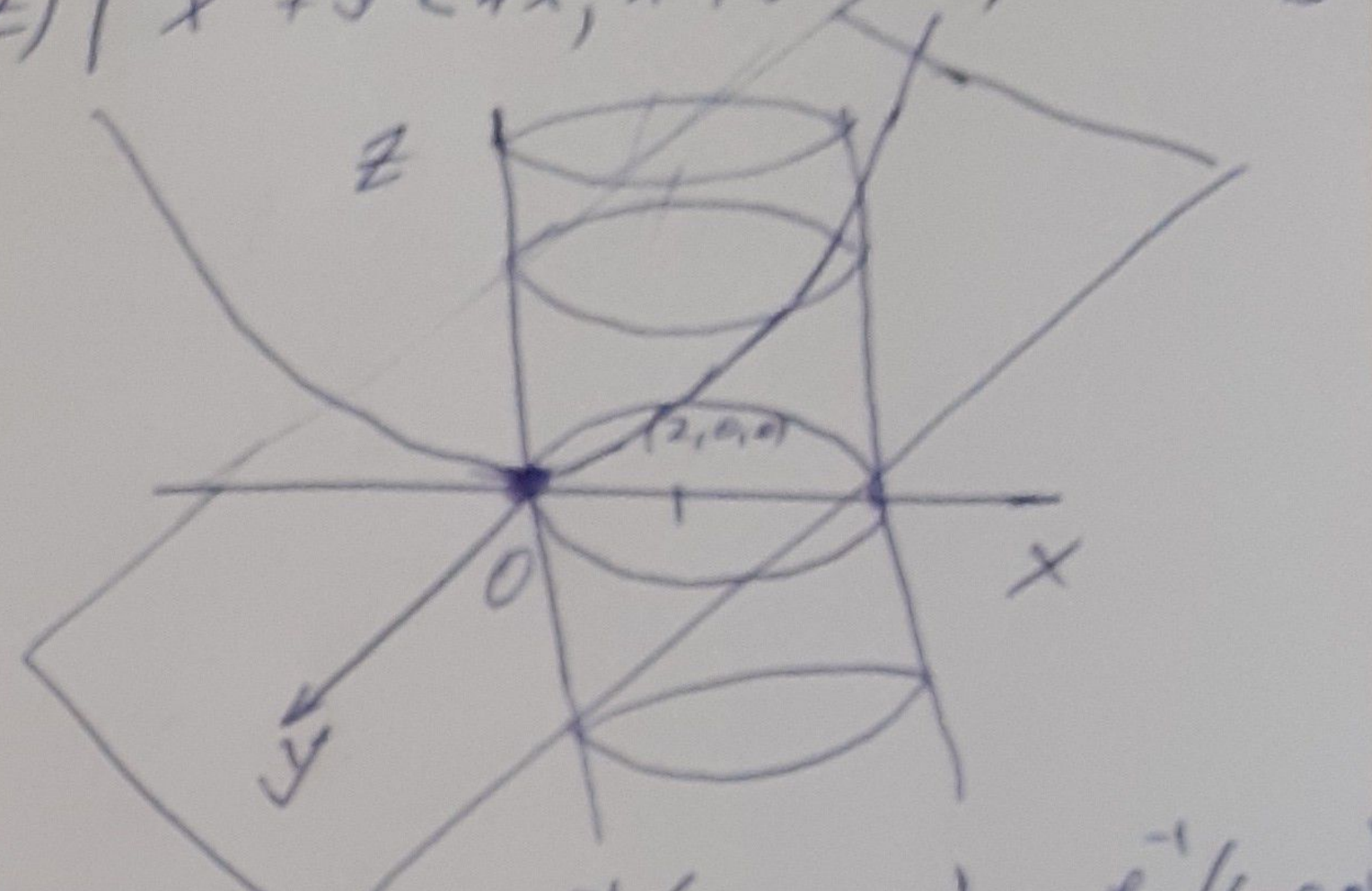
$f(x,y,z)=\langle (A,B,C),(x,y,z)\rangle + D$. Јасно, $f\in C(\mathbb{R}^3)$ (прода-ваве), и $\Pi = f^{-1}(\{0\})$ ($\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$) је затворен скуп.

6. Показати да је скуп $A=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2<4x,\ x^2+y^2<z,\ x+y<z\}$ отворен.

$(x-2)^2+y^2<4$

$x^2+y^2<z$

$x+y<z$




<u>Рјешење:</u>

$f_1(x,y,z)=x^2+y^2-4x$

$f_2(x,y,z)=x^2+y^2-z$

$f_3(x,y,z)=x+y-z$

$A=f_1^{-1}((-\infty,0))\cap f_2^{-1}((-\infty,0))\cap f_3^{-1}((-\infty,0))$

7. Нека су $f,g\in C(\mathbb{R})$. Доказати да је скуп $A=\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=g(x,y,z)\}$ затворен.

<u>Рјешење:</u> <u>I начин</u> Нека је $(x_0,y_0,z_0)\in\bar{A}$. Тада постоји низ $\{X_k\}_{k\geq 1}$ из $A$ тако да $X_k\to(x_0,y_0,z_0)$, $k\to\infty$ ($X_k=(x_1^k,x_2^k,x_3^k)$). Како је (1) $f(x_1^k,x_2^k,x_3^k)=g(x_1^k,x_2^k,x_3^k)$, то прелазећи на граничну вриједност у (1) када $k\to\infty$ добијамо $\lim_{k\to\infty} f(x_1^k,x_2^k,x_3^k)=\lim_{k\to\infty} g(x_1^k,x_2^k,x_3^k)$

$f(x_0,y_0,z_0)=g(x_0,y_0,z_0)\Rightarrow(x_0,y_0,z_0)\in A$

$\Rightarrow \bar{A}\subseteq A\Rightarrow A=\bar{A}$.

<u>II начин</u> $A=\{(x,y,z) \mid h(x,y,z)=0\}$, $h=f-g$,

$A=h^{-1}(\{0\})$.

8. Израчунати следеће граничне вриједности.

(а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ (б) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

(ц) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$ (д) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

Рјешење: (а) $0 \le \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \dfrac{x^2}{x^4} + \dfrac{y^2}{y^4}$, тј.

$$0 \le \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$$

(б) $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$, узимамо $0 \le \dfrac{xy}{x^2+y} \le \dfrac{1}{2} \Longrightarrow$

$$0 \le \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0.$$

(ц) Како $x\to 0, y\to 0$, можемо претпоставити да је $0 < x^2+y^2 < 1$. $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 \ge x^2y^2$ за свако $x,y\in\mathbb{R}$.

Тако $1 \ge (x^2+y^2)^{x^2y^2} \ge (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$ $(t = x^2+y^2)$

$$1 \ge \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} \ge \lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{4}t^2} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{4}t^2 \ln t} = e^0 = 1$$

(д) Сами.

9. Израчунати граничне вриједности

(а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos xy}{x^2y^2}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac{1}{x_1^2+\dots+x_n^2}}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$

(в) $\lim\limits_{\substack{x_1\to \infty\\ \dots\\ x_n\to\infty}} \dfrac{e^{x_1^2+\dots+x_n^2}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{\alpha}}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\alpha>0$ (г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

Рјешење (а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2\sin^2\frac{xy}{2}}{x^2y^2} = 2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

(б) $t = x_1^2+\dots+x_n^2$, $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s = e$

(в) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^t}{t^\alpha} = \infty$, $t = x_1^2+\dots+x_n^2$.

(г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\cdot\dfrac{\sin(xy)}{xy} = \lim\limits_{y\to 0} y = 0$

10. Показати да за функцију $u(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ постоје $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} u(x,y)\right)$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} u(x,y)\right)$, а да не постоји $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$.

Рјешење: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{y\to 0} -\dfrac{y}{y} = -1.$

Низови $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $(x_n',y_n') = \left(\frac{1}{n},-\frac{2}{n}\right)$, $(x_n,y_n)\to 0$, $(x_n',y_n')\to 0$, $n\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n,y_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n',y_n') = -3 \Rightarrow$ не постоји $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$.

Испитати равномјерну непрекидност функције ⊗.

$$u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$ на скупу $A=\{(x,y): 0<x^2+y^2\le 1\}$

<u>Решење.</u> / $\tilde{A}=A\cup\{(0,0)\}$ и функција.

$$\tilde{u}(x,y)=\begin{cases} u(x,y), & (x,y)\in A \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y), & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\tilde{A}$ - компактан (затворен + ограничен), $\tilde{u}$ је непрекидна на $\tilde{A}$ јер за $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$, имамо

$$0\le |u(x,y)|\le \left| x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\le$$

$$|x|\cdot 1+|y|\cdot 1=|x|+|y|.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=0=\tilde{u}(0,0)$. Према теореми Cantora $\Rightarrow$ $\tilde{u}$ је равномјерно непрекидна на $\tilde{A}$ па је $\tilde{u}|_A=u$ је равн.-неп. на $A$.